**Прыгающий шарик**

Рассмотренные нами примеры были одномерными отображениями, поскольку характеризовались единственной переменной *x*. Теперь мы рассмотрим пример системы, которая характеризуется уже двумя измерениями.

При решении задачи 1 из раздела "Дискретные отображения на примере школьной задачи" вы познакомились еще с одной системой, демонстрирующей, наряду с логистическим отображением, геометрическую прогрессию. Вы показали, что высота подскока шарика, отпущенного над горизонтальной поверхностью, дается соотношением

http://sgtnd.narod.ru/wts/rus/kruzh/jumpball-img/eqn1.gif

где http://sgtnd.narod.ru/wts/rus/kruzh/jumpball-img/eqn17.gif - доля теряемой при ударе скорости. Правда, это убывающая прогрессия, так какhttp://sgtnd.narod.ru/wts/rus/kruzh/jumpball-img/eqn2.gif. А нельзя ли превратить эту систему в систему со сложной динамикой? Для этого надо как-то поддержать колебания шарика. Простейшее решение состоит в том, чтобы заставить поверхность вибрировать, например, по гармоническому закону (рис.1):

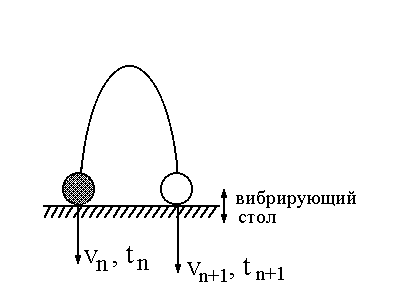


Рис.1

Тогда "стол" может двигаться навстречу шарику, сообщать энергию и поддерживать колебания. Для такой системы довольно просто построить дискретное отображение. Прежде всего договоримся о выборе дискретных переменных. В отличие от логистического отображения их будет две: скорость шарика перед *n*-ым ударом http://sgtnd.narod.ru/wts/rus/kruzh/jumpball-img/eqn34.gifи момент его удара *tn*.

Сделаем одно очень существенное предположение - будем пренебрегать смещением стола в момент удара. (Этот можно сделать, если скорость шарика достаточно велика по сравнению со скоростью плиты.) Тогда движение шарика на плоскости *t*, *y* выглядит так, как показано на рис.2.

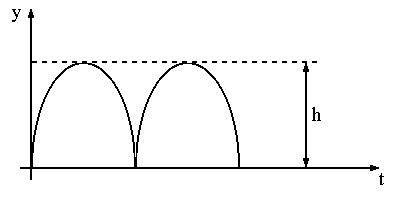


Рис.2

Итак, скорость шарика перед ударом http://sgtnd.narod.ru/wts/rus/kruzh/jumpball-img/eqn34.gif. Пусть скорость стола зависит от времени по закону

http://sgtnd.narod.ru/wts/rus/kruzh/jumpball-img/eqn3.gif

Тогда перед ударом его скорость есть http://sgtnd.narod.ru/wts/rus/kruzh/jumpball-img/eqn4.gif. Перейдем в систему отсчета, связанную со столом. В этой системе отсчета шарик налетает со скоростью

http://sgtnd.narod.ru/wts/rus/kruzh/jumpball-img/eqn5.gif.

При ударе по условию теряется доля скорости http://sgtnd.narod.ru/wts/rus/kruzh/jumpball-img/eqn6.gif. Тогда в этой системе отсчета скорость шара после удара

http://sgtnd.narod.ru/wts/rus/kruzh/jumpball-img/eqn7.gif.

Вернемся в исходную систему отсчета, для чего добавим к найденному значению скорости скорость стола. Тогда шарик отлетает от плиты со скоростью

http://sgtnd.narod.ru/wts/rus/kruzh/jumpball-img/eqn8.gif.

Ясно, что, подпрыгнув с этой скоростью в отсутствии сопротивления воздуха, он с ней же упадет на стол. Но это уже будет скорость перед (*n*+1)-ым ударом. Таким образом

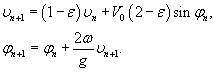
http://sgtnd.narod.ru/wts/rus/kruzh/jumpball-img/eqn9.gif.

Время свободного полета шарика http://sgtnd.narod.ru/wts/rus/kruzh/jumpball-img/eqn10.gif. Тогда очевидно

http://sgtnd.narod.ru/wts/rus/kruzh/jumpball-img/eqn11.gif

Мы получили искомое двумерное отображение. Его можно несколько упростить, приведя к безразмерному виду. Для этого положим http://sgtnd.narod.ru/wts/rus/kruzh/jumpball-img/eqn12.gif .

Тогда



Полагая http://sgtnd.narod.ru/wts/rus/kruzh/jumpball-img/eqn14.gif , получим

http://sgtnd.narod.ru/wts/rus/kruzh/jumpball-img/eqn15.gif

Здесь http://sgtnd.narod.ru/wts/rus/kruzh/jumpball-img/eqn16.gif .

Итак, в безразмерном виде наше отображение характеризуется двумя параметрами: http://sgtnd.narod.ru/wts/rus/kruzh/jumpball-img/eqn17.gif- параметр диссипации и *k* - безразмерная амплитуда колебаний стола.

В наше соотношение мы добавили символы http://sgtnd.narod.ru/wts/rus/kruzh/jumpball-img/eqn18.gif . Это означает, что мы берем не само значение фазы http://sgtnd.narod.ru/wts/rus/kruzh/jumpball-img/eqn19.gif, а добавку к http://sgtnd.narod.ru/wts/rus/kruzh/jumpball-img/eqn20.gif, где *n* - целое. Такое дополнение естественно, так как синус - http://sgtnd.narod.ru/wts/rus/kruzh/jumpball-img/eqn21.gif-периодическая функция, а http://sgtnd.narod.ru/wts/rus/kruzh/jumpball-img/eqn22.gifбудет меняться в ограниченном интервале от 0 до http://sgtnd.narod.ru/wts/rus/kruzh/jumpball-img/eqn23.gif.

Убедимся, что наше предположение о том, что вибрации стола поддержат колебания шарика, верно. Найдем неподвижную точку отображения

http://sgtnd.narod.ru/wts/rus/kruzh/jumpball-img/eqn24.gif

Отсюда



Это уравнение имеет два решения

http://sgtnd.narod.ru/wts/rus/kruzh/jumpball-img/eqn26.gif

при условии http://sgtnd.narod.ru/wts/rus/kruzh/jumpball-img/eqn27.gifМожно показать, что одна из этих точек устойчива, а другая - нет. (Вообще, устойчивые и неустойчивые точки рождаются парами.) Таким образом, если безразмерная амплитуда http://sgtnd.narod.ru/wts/rus/kruzh/jumpball-img/eqn28.gif , то в системе возможна неподвижная точка, которой отвечают подскоки на одинаковую высоту (рис.2).

Мы можем легко найти высоты подскоков в этой точке

http://sgtnd.narod.ru/wts/rus/kruzh/jumpball-img/eqn29.gif

Будем теперь увеличивать амплитуду колебаний стола *k*. Обратимся к компьютерному моделированию. На рис.3 показано бифуркационное дерево, дающее зависимость установившейся скорости *V* от амплитуды *k* при фиксированном значении http://sgtnd.narod.ru/wts/rus/kruzh/jumpball-img/eqn30.gif.

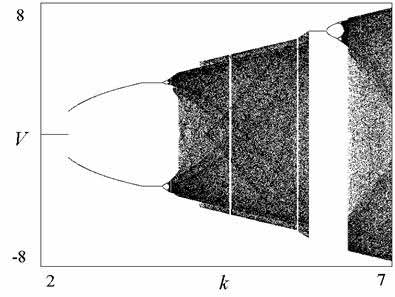


Рис. 3

Можно видеть, что в системе имеет место бифуркации удвоения периода. Нам остается добавить, что наша практически школьная задача на самом деле является одной из серьезных моделей нелинейной динамики. Ее ввел российский физик Заславский, как некоторую модель астрофизики ускорения космических частиц гравитационными полями звезд. Однако она получила популярность скорее как именно как модель шарика, прыгающего на столе. Ее реализовывали и экспериментально, для чего в качестве вибрирующего стола использовали диффузор громкоговорителя (рис.4)

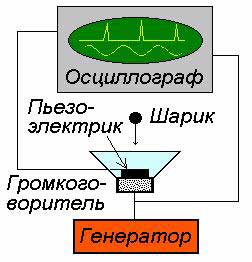


Рис.4

В эксперименте наблюдались и удвоения периода и хаотические колебания.

**Задачи**

1. Постройте бифуркационное дерево в задаче о прыгающем шарике для http://sgtnd.narod.ru/wts/rus/kruzh/jumpball-img/eqn31.gif, http://sgtnd.narod.ru/wts/rus/kruzh/jumpball-img/eqn32.gif и http://sgtnd.narod.ru/wts/rus/kruzh/jumpball-img/eqn33.gif.
2. Изобразите качественно график *y*=*y*(*t*), подобный рис.3, для случая удвоенного периода колебаний.
3. Напишите программу, которая строит график *y*(*t*). Рассмотрите случаи 2-цикла, 4-цикла, хаоса, и другие возможные варианты.
4. Обсудите применимость сделанного приближения о пренебрежении смещением плиты. Когда оно будет справедливо?

